

# Colloque Fédération Normandie-Mathématiques

## EDP - Normandie

23 & 24 Octobre 2012

Université du Havre  
Laboratoire de Mathématiques  
Appliquées du Havre  
UFR des Sciences et Techniques

### Troisième édition Colloque EDP-Normandie

Université du Havre

25 rue Philippe Lebon  
BP 540, 76058 Le Havre Cedex

Organisée par



Sponsors



Version date : 24 septembre 2012





Le Havre, Honfleur et le pont de Normandie

## Comités

### Comité scientifique

Patrizia Donato  
LMRS, Université de Rouen  
Patrizia.Donato@univ-rouen.fr

Olivier Goubet  
LAMFA, Université de Picardie  
olivier.goubet@u-picardie.fr

Rabah Labbas  
LMAH, Université du Havre  
rabah.labbas@univ-lehavre.fr

Taoufik Sassi  
LMNO, Université de Caen  
taoufik.sassi@unicaen.fr

### Comité d'organisation

Gisella Croce  
LMAH, Université du Havre  
croceg@univ-lehavre.fr

Christian Dogbe  
LMNO, Université de Caen  
christian.dogbe@unicaen.fr

Olivier Guibé  
LMRS, Université de Rouen  
olivier.guibe@univ-rouen.fr

### Webmaster

Christian Dogbe  
LMNO, Université de Caen

# Programme

## Mardi, 23 Octobre 2012 – Matin

8h00 - 8h45

Enregistrement

Salle : Amphi Lesueur

Chairman : R. Labbas

9h00 - 9h15

Ouverture du colloque

9h15 - 10h00

Exposé n°1

Marc Massot

10h00 - 10h45

Exposé n°2

Guillaume Carlier

10h45 - 11h15

Pause café

11h15 - 12h00

Exposé n°3

Christophe Besse

12h00 - 13h45

Déjeuner

## Mardi, 23 Octobre 2012 – Après-midi

Salle : Amphi Lesueur

Chairman : P. Donato

13h45 - 14h30

Exposé n°4

Annie Raoult

14h30 - 15h15

Exposé n°5

Paola Goatin

15h15 - 16h15

Posters & Pause café

16h15 - 17h00

Exposé n°6

Philippe Laurençot

19h00 - 22h30

Dîner

## Mercredi, 24 Octobre 2012 – Matin

Salle : Amphi Lesueur

Chairman : T. Sassi

9h - 9h45

Exposé n°7

Antoine Henrot

9h45 - 10h30

Exposé n°8

Claire Chainais-Hillairet

10h30 - 11h00

Pause café

11h00 - 11h45

Exposé n°9

Laurent Chupin

11h45 - 13h30

Déjeuner

## Mercredi, 24 Octobre 2012 – Après-midi

Salle : Amphi Lesueur

Chairman : O. Goubet

13h30 - 14h15

Exposé n°10

Boris Andreianov

14h15 - 15h00

Exposé n°11

Daniela Giachetti

15h00 - 15h30

Pause café

15h30 - 16h15

Exposé n°12

Nicolas Forcadel

16h15 -

FIN



Le pont de Normandie

## Table des matières

Techniques entropiques et renormalisation pour les opérateurs de diffusion fractionnaire	
<b>Boris ANDREIANOV</b> .....	7
Une nouvelle décomposition pour l'équation de Schrödinger non linéaire semi-classique menant à des schémas préservant l'asymptotique	
<b>Christophe BESSE</b> .....	9
Résolution du problème de Dirichlet pour le Jacobien prescrit par Monge-Ampère	
<b>Guillaume CARLIER</b> .....	11
Schémas numériques pour le modèle de dérive-diffusion. Étude des comportements asymptotiques	
<b>Claire CHAINAIS-HILLAIRET</b> .....	13
Écoulements diphasiques en lubrification	
<b>Laurent CHUPIN</b> .....	15
Modèle de Frenkel-Kontorova : résultat d'homogénéisation et existence de travelling waves	
<b>Nicolas FORCADEL</b> .....	17
Singular problems : existence and homogenization results	
<b>Daniela GIACHETTI</b> .....	19
Lois de conservation pour la modélisation du trafic	
<b>Paola GOATIN</b> .....	20
Énergie élastique d'un corps convexe	
<b>Antoine HENROT</b> .....	22
Approximations de type film mince du problème de Muskat	
<b>Philippe LAURENÇOT</b> .....	23
Méthodes numériques adaptatives pour la simulation de la dynamique de fronts de réaction multi-échelles temps/espace	
<b>Marc MASSOT</b> .....	25
Modèles équivalents pour des réseaux : homogénéiser ou non ?	
<b>Annie RAOULT</b> .....	29





Étretat est une charmante petite ville balnéaire de Haute-Normandie

## Techniques entropiques et renormalisation pour les opérateurs de diffusion fractionnaire

**Boris ANDREIANOV**

Laboratoire de Mathématiques CNRS UMR 6623, Université de Franche-Comté  
boris.andreianov@univ-fcomte.fr

### Résumé

Les opérateurs de diffusion fractionnaire sont bien connus des probabilistes, et leur étude par des outils d'EDP s'est intensifiée depuis quelques années. Plusieurs modèles faisant intervenir de tels opérateurs ont été proposés en dynamique des populations, en détonation des gaz, en peridynamique. Le Laplacien fractionnaire  $(-\Delta)^{\lambda/2}$  dans  $\mathbb{R}^n$  est le prototype de tels opérateurs. Il peut être défini soit grâce au multiplicateur de Fourier  $|\xi|^\lambda$  soit comme un opérateur intégral avec noyau singulier (la formule de Lévy-Khintchine). C'est donc un opérateur non local.

Du point de vue formel, cet opérateur partage certaines propriétés cruciales du Laplacien : en particulier, il vérifie le principe du maximum, et l'équation d'évolution correspondante vérifie (tout au moins, formellement) la propriété de contraction dans  $L^1$ . Dans les EDP scalaires régies par des opérateurs accréatifs (telles que la loi de conservation visqueuse  $u_t + \operatorname{div} f(u) - \Delta u = 0$ ) le Laplacien peut être remplacé par le Laplacien fractionnaire, et on s'attend à ce que les méthodes des EDP développées pour l'équation locale restent applicables pour son analogue non locale.

Dans cet exposé, nous décrivons l'application des techniques déjà devenues classiques (solutions entropiques au sens de Kruzhkov/Carrillo et ceux au sens de Bénilan et al. ; solutions renormalisées au sens de Murat et al.) aux équations scalaires avec opérateurs non locaux. La difficulté principale réside alors dans le fait que ces techniques reposent sur l'utilisation de la règle de la chaîne pour la dérivation. Les opérateurs non-locaux ne vérifient pas une telle règle, et on doit alors adapter les techniques classiques.

Nous présenterons le cadre de solutions entropiques à la Kruzhkov pour les



Le Mont-Saint-Michel et sa baie : endroit le plus célèbre, et le plus visité de la Normandie

lois de conservation fractionnaires

$$u_t + \operatorname{div} f(u) - (\Delta)^{\lambda/2} u = 0$$

(ce cadre est dû à Nathael Alibaud) ; nous discuterons de l'utilité de cette notion pour les cas  $\lambda \in (0, 1)$  et pour le cas  $\lambda \in (1, 2)$ . Puis, nous décrivons les solutions renormalisées et les solutions entropiques [1] pour les équations elliptiques-paraboliques qui généralisent les équations classiques de la chaleur et des milieux poreux :

$$b(u)_t - (\Delta)^{\lambda/2} u = 0.$$

L'exposé est basé sur les travaux avec N. Alibaud (Besançon) et M. Bendahmane (Bordeaux).

## Références

- [1] PH. BÉNILAN, L. BOCCARDO, TH. GALLOUËT, R. GARIEPY, M. PIERRE ET J.L. VÁZQUEZ, An  $L^1$ -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations, Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 22(2) (1995), 241-273.



# Une nouvelle décomposition pour l'équation de Schrödinger non linéaire semiclassique menant à des schémas préservant l'asymptotique

**Christophe BESSE**

Université de Lille 1, Laboratoire Paul Painlevé, UMR CNRS 8524, Équipe INRIA Simpaf  
Christophe.Besse@math.univ-lille1.fr

**Rémi CARLES**

CNRS et Université Montpellier 2  
Remi.Carles@math.cnrs.fr

**Florian MEHATS**

Université de Rennes 1, IRMAR, Équipe INRIA IPSO  
florian.mehats@univ-rennes1.fr

## Résumé

Nous considérons la limite semi classique  $\varepsilon \rightarrow 0$  pour l'équation de Schrödinger nonlinéaire cubique défocalisante (NLS)

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = |u^\varepsilon|^2 u^\varepsilon, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \quad (1)$$

pour  $d \leq 3$  et avec une donnée initiale de type WKB

$$u^\varepsilon(0, x) = a_0(x)e^{i\phi_0(x)/\varepsilon}. \quad (2)$$

La transformation de Madelung [5] appliquée à (1) conduit à un système d'Euler compressible avec la présence d'un potentiel de Bohm. Dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la pression quantique disparaît et on obtient les équations d'Euler isentropiques compressibles [2]. Cette transformation présente malheureusement le défaut de



La falaise d'Étretat au coucher du soleil

ne pas supporter la présence du vide [3]. En 1998, Grenier [4], en adaptant la transformation de Madelung, obtient un nouveau modèle pour lequel la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  n'est plus singulière vis à vis du vide. Cette technique permet d'obtenir des schémas préservant l'asymptotique (AP) [1]. Cependant, les méthodes ne sont AP qu'en temps petit et ne peuvent a priori pas permettre de résoudre NLS en temps long lorsque  $\varepsilon > 0$  est fixé. Nous présenterons une modification de la transformation de Grenier qui la rend plus régulière et qui permet d'obtenir des résultats d'existence globale. L'intérêt est la construction d'un schéma numérique AP qui fonctionne en temps quelconque à  $\varepsilon$  fixé. Nous illustrerons l'efficacité de cette méthode par des exemples numériques.

## Références

- [1] R. CARLES, B. MOHAMMADI, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 45 (2011), no. 5, 981-1008
- [2] P. DEGOND, S. GALLEGO, et F. MÉHATS, An asymptotic preserving scheme for the Schrödinger equation in the semiclassical limit, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 345 (2007), no. 9, 531-536.
- [3] C. L. GARDNER, The quantum hydrodynamic model for semiconductor devices, *SIAM J. Appl. Math.* 54 (1994), no. 2, 409-427.
- [4] E. GRENIER, Semiclassical limit of the nonlinear Schrödinger equation in small time, *Proc. Amer. Math. Soc.* 126 (1998), no. 2, 523-530.
- [5] E. MADELUNG, Quanten theorie in Hydrodynamischer Form, *Zeit. F. Physik* 40 (1927), 322.



À portée de vue du Mont Saint-Michel, les agneaux se régalaient dans les prés

## Résolution du problème de Dirichlet pour le Jacobien prescrit par Monge-Ampère

**Guillaume CARLIER**

Université Paris Dauphine, UMR CNRS 7534  
carlier@ceremade.dauphine.fr

**Bernard DACOROGNA**

Section de Mathématiques, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1015  
Lausanne, Suisse  
bernard.dacorogna@epfl.ch

### Résumé

Dans [3], Dacorogna et Moser ont montré comment résoudre le problème de Dirichlet pour l'équation du Jacobien prescrit :

$$\begin{cases} \det(\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = \text{id} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec régularité optimale, c'est-à-dire possède au moins une solution dans  $\text{Diff}^{r+1,\alpha}(\bar{\Omega}; \bar{\Omega})$ . par la méthode du flot de Moser et un argument de point fixe. Dans cet exposé nous donnerons une preuve alternative basée sur l'équation de Monge-Ampère. Nous nous proposons [2], d'aborder cette question par une approche tout à fait différente mais très naturelle qui consiste dans un premier temps à résoudre l'équation de Monge-Ampère

$$\begin{cases} \det(\nabla^2 \varphi) = f & \text{dans } \Omega \quad , \\ \varphi \text{ connexe et } \nabla \varphi(\Omega) = \Omega \quad . \end{cases}$$

Ceci revient à dire que  $\nabla \varphi$  est le transport optimal de  $Y$ . Brenier (voir [1]) entre  $f$  et la mesure uniforme.



L'Aiguille d'Étretat, témoin du passé géologique des falaises d'Étretat

## Références

- [1] Y. BRENIER, Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 44 (1991), 375-417.
- [2] G. CARLIER, B. DACOROGNA, Résolution du problème de Dirichlet pour l'équation du Jacobien prescrit via l'équation de Monge-Ampère, *CR Mathématiques*, à paraître.
- [3] B. DACOROGNA B. et J. MOSER, On a partial differential equation involving the Jacobian determinant, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 7 (1990), 1-26.



Les falaises d'Étretat sont réputées pour leur côté majestueux.

# Schémas numériques pour le modèle de dérive-diffusion. Étude des comportements asymptotiques

**Claire CHAINAIS-HILLAIRET**

Laboratoire Paul Painlevé. Université Lille 1  
chainais@math.univ-lille1.fr

## Résumé

On s'intéresse au modèle de dérive-diffusion classique intervenant dans la modélisation des semi-conducteurs. Il s'agit d'un système couplé d'équations de convection-diffusion sur les densités de charge  $N$  et  $P$  et d'une équation de Poisson sur le potentiel électrique  $\Psi$ :

$$\begin{aligned}\partial_t N + \operatorname{div}(-\nabla N + N\nabla\Psi) &= 0, \\ \partial_t P + \operatorname{div}(-\nabla P - P\nabla\Psi) &= 0, \\ -\lambda^2 \Delta\Psi &= P - N + C.\end{aligned}$$

La quantité  $C$  désigne le dopage du semi-conducteur et  $\lambda$  est la longueur de Debye, paramètre adimensionné. Le comportement en temps long (convergence vers un état stationnaire) a été étudié par A. Jüngel [3] et le comportement quand  $\lambda$  tend vers 0 (limite quasi-neutre) par A. Jüngel et Y.-J. Peng [4] et I. Gasser [5]. Ces résultats sont obtenus grâce à des méthodes d'entropie.

L'objectif du travail est de mettre au point des schémas numériques qui préservent ces comportements asymptotiques. Le comportement en temps long a déjà été étudié par C. Chainais-Hillairet et F. Filbet [2] et par M. Chatard [1]. On s'intéresse ici plus particulièrement à l'asymptotique quasi-neutre. On montre qu'un schéma implicite en temps et volumes finis en espace avec une discrétisation de Scharfetter-Gummel [6] pour les flux de convection-diffusion est convergent pour toute valeur de  $\lambda$  et préserve l'asymptotique quasi-neutre. Pour obtenir ce résultat, le point crucial est la démonstration d'estimations d'entropie, avec contrôle de la production d'entropie, au niveau discret.

Il s'agit d'un travail en collaboration avec M. Bessemoulin-Chatard (Université Blaise Pascal) et M.-H. Vignal (Université Toulouse III).



Vue de la côte normande

## Références

- [1] M. CHATARD. Asymptotic behavior of the scharfetter-gummel scheme for the drift-diffusion model. 2011.
- [2] C. CHAINAIS-HILLAIRET et F. FILBET. Asymptotic behaviour of a finite-volume scheme for the transient drift-diffusion model. *IMA J. Numer. Anal.*, 27, 4, pp. 689–716, 2007.
- [3] A. JÜNGEL. Qualitative behavior of solutions of a degenerate nonlinear drift-diffusion model for semiconductors *Math. Mod. and Meth. in Appl. Sci.* 5 (1995), 497–518.
- [4] A. JÜNGEL et Y.-J. PENG. A hierarchy of hydrodynamic models for plasmas. Quasi-neutral limits in the drift-diffusion equations. *Asymptot. Anal.*, 28(1) :49–73, 2001.
- [5] I. GASSER. The initial time layer problem and the quasineutral limit in a nonlinear drift diffusion model for semiconductors. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 8(3) :237–249, 2001.
- [6] D. L. SCHARFETTER et H. K. GUMMEL. Large signal analysis of a silicon Read diode. *IEEE Trans. on Elec. Dev.* 16 : 64–77,(1969).



Falaise d'Étretat : ici la Manneporte (qui signifie porte principale en vieux français) haute de 80 mètres en 1979

## Écoulements diphasiques en lubrification

**Laurent CHUPIN**

Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand  
laurent.chupin@math.univ-bpclermont.fr

**Bérénice GREC**

Université Paris Descartes, Paris 5  
berenice.grec@math.cnrs.fr

### Résumé

L'objectif de cet exposé est de présenter des travaux récents, réalisés en collaboration avec Bérénice Grec, concernant des modèles d'écoulements de deux fluides confinés entre deux surfaces. Du point de vue des applications, ces types de modèles sont pertinents pour appréhender, par exemple, des phénomènes de cavitation ou de saturation dans des mécanismes lubrifiés.

Les modèles les plus simples sont issus des équations de Navier-Stokes incompressibles stationnaires pour un mélange de deux fluides non miscibles. Dans ce cas, une asymptotique de type "film mince" permet de décrire de façon originale le problème en terme de zéros d'un polynôme de degré 6. Une analyse numérique permet ainsi de prévoir selon les paramètres physiques (débits, vitesse de cisaillement et viscosités) si l'un des deux fluides va saturer, c'est-à-dire remplir tout le domaine.

La seconde partie de l'exposé sera consacrée à un cas plus général prenant en compte à la fois l'évolution temporelle de l'écoulement et les effets de tension de surface. D'un point de vue mathématique, on peut décrire ces écoulements par une équation aux dérivées partielles dégénérée d'ordre 4. Une étude théorique puis numérique permet de mieux comprendre comment se comportent de tels écoulements.



Manoirs du Calvados Pays d'Auge - Pommeau, Cidre Poiré : Alcool local

## Références

- [1] L. CHUPIN and B. GREC, Steady state solutions for a lubrication two-fluid flow, *European Journal of Applied Mathematics*, Volume 22, Issue 06, (2011), pp 581-612.
- [2] L. CHUPIN and B. GREC, Lubrication mutli-fluid flow taking into account the surface tension, in preparation (2012).



Le château ducal à Caen

## Modèle de Frenkel-Kontorova : résultat d'homogénéisation et existence de traveling waves

**Nicolas FORCADEL**

Université Paris-Dauphine, Ceremade  
forcadel@ceremade.dauphine.fr

**Mohammad AL HAJ**

Université Paris-Est, CERMICS, Ecole des Ponts ParisTech  
al-hajm@cermics.enpc.fr

**Cyril IMBERT**

CNRS, Université Paris-Est Créteil  
cyril.imbert@u-pec.fr

**Régis MONNEAU**

Université Paris-Est, CERMICS, Ecole des Ponts ParisTech  
monneau@cermics.enpc.fr

### Résumé

Dans cet exposé, nous nous intéresserons au modèle de Frenkel-Kontorova. Il s'agit d'un système d'équations différentielles ordinaires qui décrit la dynamique de particules. Chaque particule satisfait une loi de Newton (incluant un terme d'amortissement et un terme d'accélération) où la force est créée par l'interaction avec les autres particules et avec un potentiel périodique.

Ce modèle est un modèle très simple et apparaît dans beaucoup d'applications : dislocations, modèle non-linéaire de la dynamique de l'ADN, en chimie (mouvement de protons dans des réseaux d'atomes d'oxygènes), ... Après avoir expliqué l'importance de l'étude des dislocations (ce qui est la motivation principale de ce travail), nous donnerons un résultat d'homogénéisation. Le but est de décrire quel est le comportement macroscopique des particules quand le nombre de particules par unité de longueur tend vers l'infini. Il s'agit donc de passer



Le survol des côtes normandes

d'une description d'un nombre fini de particules à une description de densité de particules.

Dans une seconde partie, nous étudierons l'existence de travelling waves pour ce modèle.

## Références

- [1] M. AL HAJ, N. FORCADEL et R. MONNEAU, Existence and uniqueness of travelling waves for fully overdamped Frenkel-Kontorova models, travail en cours.
- [2] N. FORCADEL, C. IMBERT et R. MONNEAU, Homogenization of the fully overdamped Frenkel-Kontorova models, *Journal of Differential Equations*, 246, 2009, pp. 1057-1097.
- [3] N. FORCADEL, C. IMBERT et R. MONNEAU, Homogenization of some particle systems with two-body interactions and of the dislocation dynamics, *Discrete and Continuous Dynamical Systems A*, 23(3), 2009, pp 785–826.
- [4] N. FORCADEL, C. IMBERT et R. MONNEAU, Homogenization of accelerated Frenkel-Kontorova models with  $n$  types of particles, accepté à *Transaction of the AMS*.



## Singular problems : existence and homogenization results

**Daniela GIACHETTI**

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria  
 Università di Roma "Sapienza"  
 I-00161 Roma, Italy

### Abstract

We will present some new existence results about a class of elliptic equations having a lower order term  $b(x, u, \nabla u)$  growing quadratically in the  $\nabla u$ -variable and singular in the  $u$ -variable on the set  $\{u = 0\}$ . We will assume homogeneous Dirichlet boundary conditions.

We refer to the model problem

$$\begin{cases} -\Delta u = b(x) \frac{|\nabla u|^2}{|u|^k} + f(x) & \text{in } \Omega \quad ; \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where  $\Omega$  is a bounded open subset of  $\mathbb{R}^N$  and  $k > 0$ . In particular, we will deal with the case where the datum  $f(x)$  can change its sign, so that the possible solution  $u$  can vanish inside  $\Omega$ , even in a set with positive measure. If we look for  $H_0^1(\Omega)$  or  $H_{loc}^1(\Omega)$  solutions, an indeterminate quotient appears since, by Stampacchia's theorem,  $|\nabla u| = 0$  on the set  $\{u = 0\}$ . Therefore, we have to carefully define the meaning of solution.

We will also study the asymptotic behaviour of the solutions of such kind of problems when the (linear) principal parts  $H$ -converge and the parameter  $k$  satisfies  $0 < k < 1$ .



L'architecture de la Normandie

## Lois de conservation pour la modélisation du trafic

**Paola GOATIN**

INRIA Sophia Antipolis - Méditerranée  
paola.goatin@inria.fr

### Résumé

L'intérêt des mathématiciens appliqués pour la dynamique du trafic routier et piéton a considérablement augmenté ces dernières années, en raison des fortes implications socio-économiques. La modélisation associée peut se faire à différentes échelles : on distingue ainsi des modèles de description microscopique (particulaires), mésoscopique (cinétique) et macroscopique (dynamique des fluides). Les modèles macroscopiques de trafic routier représentent une application de la théorie des lois de conservation. Dans ce contexte, plusieurs modèles ont été proposés depuis les années 50. On peut distinguer des modèles dits de *premier ordre*, comportant seulement l'équation de conservation de la masse [8, 9], ainsi que des modèles plus élaborés, comme les modèles de *second ordre* qui consistent en un système de deux lois des conservation [2], ou encore des modèles avec transition de phase [3, 4, 7]. Ces derniers ont été introduits dans le but de retrouver les relations observées expérimentalement entre le flux et la densité. Ces modèles consistent en une loi de conservation scalaire qui décrit l'écoulement *fluide*, et un système de deux lois de conservation pour décrire le comportement *congestionné*. Le couplage est obtenu par l'introduction d'une transition de phase entre la phase fluide et la phase congestionnée.

Un autre problème issu de la modélisation du trafic routier, intéressant dans un cadre plus général, est l'étude d'une loi de conservation scalaire (ou plus généralement d'un système de lois de conservation) soumise à une contrainte unilatérale en un point (comme dans le cas d'un péage) ou sur un intervalle (comme dans le cas d'une limite de flux ou de vitesse). Le point fondamental de cette étude est le choix d'un solveur de Riemann non classique et la disponibilité d'un critère d'entropie [1, 5, 6].



Les vaches normandes : l'un des grands symboles de la Normandie

## Références

- [1] B. ANDREIANOV, P. GOATIN, and N. SEGUIN, Finite volume schemes for locally constrained conservation laws. *Numer. Math.*, 115(4), 609–645, 2010.
- [2] A. AW and M. RASCLE, Resurrection of “second order” models of traffic flow. *SIAM J. Appl. Math.*, 60 :916–938, 2000.
- [3] S. BLANDIN, D. WORK, P. GOATIN, B. PICCOLI, and A. BAYEN, A general phase transition model for vehicular traffic. *SIAM J. Appl. Math.*, 71(1), 107–127, 2011.
- [4] R. M. COLOMBO, Hyperbolic phase transitions in traffic flow. *SIAM J. Appl. Math.*, 63(2) :708–721, 2002.
- [5] R. M. COLOMBO and P. GOATIN, A well posed conservation law with a variable unilateral constraint. *J. Differential Equations*, 234(234) :654–675, 2007.
- [6] M. GARAVELLO and P. GOATIN, The Aw-Rascle traffic model with locally constrained flow. *J. Math. Anal. Appl.*, 378(2), 634–648, 2011.
- [7] P. GOATIN, The Aw-Rascle traffic flow model with phase transition. *Math. Comput. Modeling*, 44 :287–303, 2006.
- [8] M. J. LIGHTHILL and G. B. WHITHAM, On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.*, 229 :317–345, 1955.
- [9] P. I. RICHARDS, Shock waves on the highway. *Operations Res.*, 4 :42–51, 1956.



Exemple d'une maison normande à colombages

## Énergie élastique d'un corps convexe

**Antoine HENROT**

Institut Élie Cartan Nancy, Université de Lorraine  
antoine.henrot@iecn.u-nancy.fr

**Chiara BIANCHINI**

Dipartimento di Matematica, Università di Firenze  
chiara.bianchini@math.unifi.it

**Takeo TAKAHASHI**

Institut Élie Cartan Nancy, Université de Lorraine  
takeo.takahashi@iecn.u-nancy.fr

### Résumé

Suivant L. Euler, on définit l'énergie élastique d'un ensemble convexe compact régulier  $K \subset \mathbb{R}^2$  par

$$E(K) = \frac{1}{2} \int_{\partial K} C^2 ds$$

où  $C$  est la courbure de la frontière. Nous noterons  $A(K)$  l'aire de  $K$  et  $P(K)$  son périmètre. Dans cet exposé, nous montrerons l'inégalité, valable pour tout convexe  $K$

$$\frac{A(K)E(K)}{P(K)} \geq \frac{\pi}{2}$$

où l'égalité n'a lieu que pour le disque. Nous en déduirons que le disque minimise l'énergie élastique avec contrainte d'aire.

Nous ferons également le lien avec des problèmes analogues tri-dimensionnels faisant intervenir l'énergie dite de Willmore (ou de Helfrich) qui sont liés à la modélisation des vésicules.

### Références

- [1] C. BIANCHINI, A. HENROT, T. TAKAHASHI, "The elastic energy of a convex body", to appear.



La falaise d'Amont à Étretat, reconnaissable à son arche creusée par l'érosion.

## Approximations de type film mince du problème de Muskat

**Philippe LAURENÇOT**

Institut de Mathématiques de Toulouse, CNRS  
laurenco@math.univ-toulouse.fr

**Joachim ESCHER**

Institut für Angewandte Mathematik, Leibniz Universität Hannover  
escher@ifam.uni-hannover.de

**Bogdan-Vasile MATIOC**

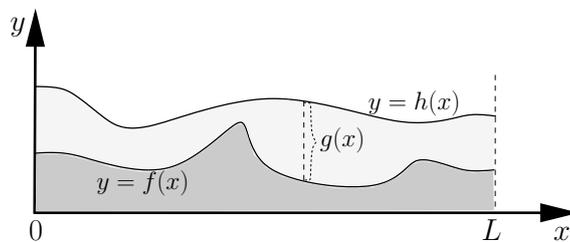
Institut für Mathematik, Universität Wien  
bogdan-vasile.matioc@univie.ac.at

### Résumé

Le problème de Muskat décrit le mouvement d'un écoulement bi-fluide dans un milieu poreux, les deux fluides ayant des densités et des viscosités différentes. C'est un problème à frontière libre dont les inconnues sont les domaines occupés par chacun des fluides  $\Omega(f) := \{(x, y) \in (0, L) \times (0, \infty) : 0 < y < f(t, x)\}$  et  $\Omega(f, h) := \{(x, y) \in (0, L) \times (0, \infty) : f(t, x) < y < h(t, x)\}$  et leurs vitesses respectives. Lorsque la hauteur du fluide  $h$  est très petite par rapport à l'étendue

$L$  du milieu poreux, un changement d'échelle et une approximation

de type "film mince" permettent de réduire le problème de Muskat à un système de deux équations paraboliques dégénérées décrivant l'évolution spatio-temporelle de la hauteur des deux fluides  $f$  et  $g := h - f$  (voir [2]). En omettant les termes de courbure, ce



système s'écrit :



Une ruelle du vieux centre médiéval de Honfleur

$$\begin{cases} \partial_t f = (1 + R)\partial_x (f\partial_x f) + R\partial_x (f\partial_x g), \\ \partial_t g = R_\mu\partial_x (g\partial_x f) + R_\mu\partial_x (g\partial_x g), \end{cases} \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L), \quad (3)$$

les paramètres  $R$  et  $R_\mu$  étant positifs et s'exprimant en fonction des densités et viscosités des deux fluides. Lorsque  $f$  et  $g$  satisfont des conditions au bord de Neumann homogènes, l'existence locale et l'unicité de solutions régulières et positives sont établis dans [2] tandis que l'existence de solutions faibles globales et positives au sens large est obtenue dans [1]. Le système (3) étant fortement couplé, l'analyse conduite dans [1] requiert une étape de régularisation assez délicate afin de préserver les estimations *a priori* pour le système régularisé. Il se trouve que (3) a aussi une structure variationnelle et peut s'écrire en particulier comme un flot de gradient pour une distance de Wasserstein lorsque  $(0, L)$  est remplacé par  $\mathbb{R}$ . Cette observation permet d'une part d'obtenir l'existence de solutions par une approche variationnelle sans passer par une étape de régularisation [3] et d'autre part de montrer l'existence de solutions d'une extension de (3) obtenue en incluant les termes de courbure qui sont des termes d'ordre 4.

## Références

- [1] J. ESCHER, PH. LAURENÇOT, and B.-V. MATIOC, Existence and stability of weak solutions for a degenerate parabolic system modelling two-phase flows in porous media, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 28(4) :583–598, 2011.
- [2] J. ESCHER, A.-V. MATIOC, and B.-V. MATIOC, Modelling and analysis of the Muskat problem for thin fluid layers, *J. Math. Fluid Mech.*, DOI 10.1007/s00021-011-0053-2.
- [3] PH. LAURENÇOT and B.-V. MATIOC, A gradient flow approach to a thin film approximation of the Muskat problem, *Calc. Var. Partial Differential Equations*. DOI 10.1007/s00526-012-0520-5.



Le coucher de soleil à Cabourg

# Méthodes numériques adaptatives pour la simulation de la dynamique de fronts de réaction multi-échelles temps/espace

## Marc MASSOT

Laboratoire EM2C - UPR CNRS 288, École Centrale Paris et Center for Turbulence Research, Stanford University  
marc.massot@ecp.fr

## Max DUARTE

Laboratoire EM2C - UPR CNRS 288, École Centrale Paris et Laboratoire J.-A. Dieudonné - UMR CNRS 7351, Université de Nice Sophia-Antipolis  
max.duarte@unice.fr, maximuspy@gmail.com

## Stéphane DESCOMBES

Laboratoire J.-A. Dieudonné - UMR CNRS 7351, Université de Nice Sophia-Antipolis  
sdescomb@math.unice.fr

## Résumé

Nous abordons le développement d'une nouvelle génération de méthodes numériques pour la résolution des EDP évolutives qui modélisent des phénomènes multi-échelles en temps et en espace issus de divers domaines applicatifs [1]. La raideur associée à ce type de problème, que ce soit via le terme source chimique qui présente un large spectre d'échelles de temps caractéristiques ou encore via la présence de fort gradients très localisés associés aux fronts de réaction, implique en général de sévères difficultés numériques. En conséquence, il s'agit de développer des méthodes qui garantissent la précision des résultats en présence de forte raideur en s'appuyant sur des outils théoriques solides, tout en permettant une implémentation efficace.

Ce travail se focalise dans un premier temps sur les systèmes de réaction-diffusion raides. La base de la stratégie numérique s'appuie sur une décomposition d'opérateur spécifique, dont le pas de temps est choisi de manière à respecter



Le pont de Normandie au petit matin

un niveau de précision donné par la physique du problème, et pour laquelle chaque sous-pas utilise un intégrateur temporel d'ordre élevé dédié. Ce schéma numérique est ensuite couplé à une approche de multirésolution spatiale adaptative permettant une représentation de la solution sur un maillage dynamique adapté. L'ensemble de cette stratégie a conduit au développement du code de simulation générique 1D/2D/3D académique MBARETE de manière à évaluer les développements

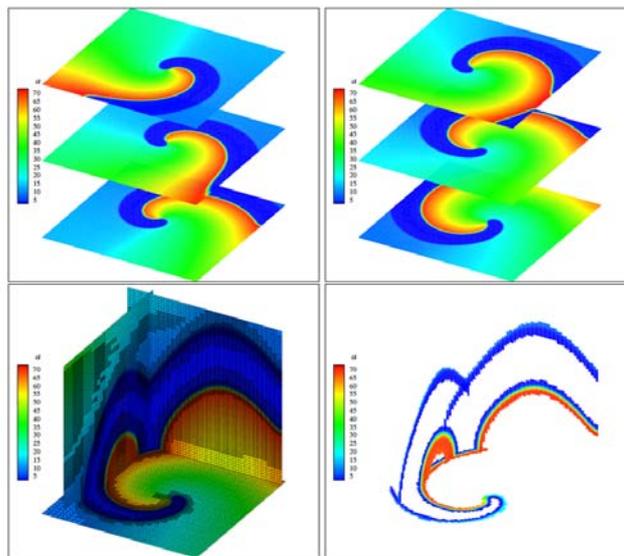


FIGURE 1 – Simulation sur une station de travail de la propagation d'une "scroll wave" sur un maillage équivalent de  $512^3$  pour un modèle avec présence d'un radical très rapide rendant le système extrêmement raide. Evolution temporelle et représentation du maillage dynamique associé au niveau le plus fin de la représentation.

théoriques et numériques dans le contexte de configurations pratiques raides issue de plusieurs domaines d'application. L'efficacité algorithmique de la méthode est démontrée par la simulation d'ondes de réaction raides dans le domaine de la dynamique chimique non-linéaire [2] et dans celui de l'ingénierie biomédicale pour la simulation des accidents vasculaires cérébraux [5].



Le port de Honfleur situé dans l'embouchure de la Seine

Pour étendre l'approche à des applications complexes et plus fortement instationnaires, nous introduisons pour la première fois une technique de séparation d'opérateur avec pas de temps adaptatif qui permet d'atteindre une précision donnée garantie malgré la raideur des EDP [3]. La méthode de résolution adaptative en temps et en espace qui en résulte, étendue au cas convectif, permet une description consistante de problèmes impliquant une très large palette d'échelles de temps et d'espace et des scénarios physiques très différents, que ce soit la propagation des décharges répétitives pulsées nanoseconde dans le domaine des plasmas [6] ou bien l'allumage et la propagation de flammes dans celui de la combustion [4]. Nous introduisons un solveur qui permet la résolution des EDP raides avec contrôle de la précision du calcul et utilisant des moyens de calculs standard. La plupart de ces résultats ont été obtenus dans le cadre de la thèse de Max Duarte<sup>1</sup> [1].

## Références

- [1] M. DUARTE, Adaptive numerical methods in time and space for the simulation of the dynamics of multi-scale reaction fronts, Thèse de Doctorat de l'École Centrale Paris (2011).
- [2] M. DUARTE, M. MASSOT, S. DESCOMBES, C. TENAUD, T. DUMONT, V. LOUVET, and F. LAURENT, New resolution strategy for multi-scale reaction waves using time operator splitting, space adaptive multiresolution and dedicated high order implicit/explicit time integrators. *SIAM J. Sci. Comput.*, 34, 1 (2012) 76–104.
- [3] S. DESCOMBES, M. DUARTE, T. DUMONT, V. LOUVET, and M. MASSOT., Adaptive time splitting method for multi-scale evolutionary PDEs. *Confluentes Mathematici*, Special Issue dedicated to Michelle Schatzman, Vol. 3, No. 3 (2011) 1–31.
- [4] M. DUARTE, M. MASSOT, S. DESCOMBES, C. TENAUD and S. CANDEL, Time-space adaptive numerical methods for the simulation of combustion fronts, *Annual Research Briefs of the Center for Turbulence Research* (2012) 347-358.

---

1. La thèse a été soutenue fin 2011 à l'ECP, co-encadrée par S. Descombes, F. Laurent-Nègre et M. Massot, en collaboration avec T. Dumont et V. Louvet, Institut Camille Jordan, Université de Lyon et C. Tenaud, LIMSI, Orsay. Elle a obtenu les prix SMAI/GAMNI et ECCOMAS 2011.



Vache normande dans le Cotentin. Normandie

- [5] M. DUARTE, M. MASSOT, S. DESCOMBES, C. TENAUD, T. DUMONT, V. LOUVET, and F. LAURENT, New resolution strategy for multi-scale reaction waves using time operator splitting and space adaptive multiresolution : Application to human ischemic stroke. Summer school on multiresolution and adaptive mesh refinement methods, ESAIM Proceedings (2011) 277-290.
- [6] M. DUARTE, Z. BONAVENTURA, M. MASSOT, A. BOURDON, S. DESCOMBES and T. DUMONT, A new numerical strategy with space-time adaptivity and error control for multi-scale streamer discharge simulations, J. Comp. Physics, 231, 3 (2012) 1002-1019.



Le Gros-Horloge de Rouen qui rythme la vie des Rouennais depuis 1389

## Modèles équivalents pour des réseaux : homogénéiser ou non ?

**Annie RAOULT**

Laboratoire MAP5, Université Paris Descartes & CNRS, Sorbonne Paris Cité  
annie.raoult@parisdescartes.fr

### Résumé

Dans la mouvance de travaux dus à des ingénieurs ou à des mathématiciens, voir l'article de survey [6], on cherche à obtenir un modèle équivalent pour un réseau élastique. Notre premier intérêt pour une telle étude est venu de la modélisation du tissu myocardique [4], notre attention a ensuite été attirée sur les nanotubes de carbone. On peut, en particulier, chercher à déterminer si la règle heuristique de Cauchy-Born [5], [7], est valable ou non.

Nous considérons tout d'abord un réseau carré qui est, ou bien assujéti à rester plane, ou bien autorisé à se déformer dans  $\mathbb{R}^3$ . L'énergie du réseau provient des changements de longueurs entre nœuds voisins et des changements d'angles. Moyennant une hypothèse de compatibilité physiquement raisonnable entre les quatre énergies d'angle, il est possible de donner à l'énergie discrète une forme intégrale faisant intervenir une seule énergie angulaire. On peut alors utiliser la gamma-convergence [2], [3], obtenir une énergie "continue" limite quand la distance entre points voisins tend vers 0, et établir que la règle de Cauchy-Born, dans une acception légèrement élargie, est valable, voir [9].

On s'intéresse ensuite aux réseaux hexagonaux en se restreignant à des interactions entre couples de points. Ce sont des réseaux dits "complexes" qui ne peuvent être générés par la translation de deux vecteurs de base. Nous suivons une description classique de tels réseaux en séparant les nœuds en deux familles. Nous démontrons [8] la convergence vers un problème de minimisation dont la densité élastique est obtenue par homogénéisation. Notre approche montre qu'une formule de type Cauchy-Born est un intermédiaire. Certains raisonnements prolongent les techniques de [10]. Signalons aussi des résultats proches dans [1].



Le château de Caen : plus grande forteresse d'Europe

## Références

- [1] R. ALICANDRO, M. CICALESE and A. GLORIA, Integral representation results for energies defined on stochastic lattices and application to nonlinear elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.* 200, 2011.
- [2] A. BRAIDES and M. S. GELLI, Continuum limits of discrete systems without convexity hypotheses, *Math. Mech. Solids* 7, 2002.
- [3] A. BRAIDES and M. S. GELLI, Limits of discrete systems with long-range interactions, *J. Convex Anal.*, 9, 2002.
- [4] D. CAILLERIE, A. MOURAD and A. RAOULT, Cell-to-muscle homogenization. Application to a constitutive law for the myocardium, *Math. Model. Num. Anal.* 37, 2003.
- [5] W. E AND P. MING, Cauchy-Born rule and the stability of crystalline solids : static problems, *Arch. Rational Mech. Anal.* 183, 2007.
- [6] J. L. ERICKSEN, On the Cauchy-Born rule, *Math. Mech. Solids* 13, 2008.
- [7] G. FRIESECKE and F. THEIL, Validity and failure of the Cauchy-Born hypothesis in a two-dimensional mass-spring lattice, *J. Nonlinear Sci.* 12, 2002.
- [8] H. LE DRET and A. RAOULT, Homogenization of hexagonal lattices, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* 349, 2011.
- [9] N. MEUNIER, O. PANTZ and A. RAOULT, Square lattices with three point interactions and Cauchy-Born rule, to appear in *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.*, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00589926>.
- [10] S. MÜLLER, Homogenization of nonconvex integral functionals and cellular elastic materials, *Arch. Rational Mech. Anal.* 99, 1987.